

1.1. Sean (X, T) un espacio topológico y $A \subset X$. Probar que la familia:

$$T^* = \{U \cup (V \cap A) \mid U, V \in T\}$$

es una topología de X y determinar la relación entre las topologías T y T^* .

SOLUCION.—Comprobamos en primer lugar que T^* es una topología de X :

1. Para $U=X$ y $V \in T$ arbitrario es $U \cup (V \cap A)=X$, por lo que $X \in T^*$.
Si $U=V=\phi$ es $U \cup (V \cap A)=\phi$ y también es $\phi \in T^*$.
2. Si $\{M_i\}_{i \in I}$ es una colección de elementos de T^* existen familias $\{U_i\}_{i \in I}$, $\{V_i\}_{i \in I}$ de manera que para cada $i \in I$, se tiene $U_i, V_i \in T$ y $M_i = U_i \cup (V_i \cap A)$.

Ahora:

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \bigcup_{i \in I} [U_i \cup (V_i \cap A)] = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cup \left[\left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap A \right]$$

y como $\bigcup_{i \in I} U_i = U \in T$, $\bigcup_{i \in I} V_i = V \in T$ resulta:

$$\bigcup_{i \in I} M_i = U \cup (V \cap A) \in T^*$$

3. Si $M_1, M_2 \in T^*$, será $M_j = U_j \cup (V_j \cap A)$ para $j = 1, 2$ y $U_j, V_j \in T$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} M_1 \cap M_2 &= [U_1 \cup (V_1 \cap A)] \cap [U_2 \cup (V_2 \cap A)] = \\ &= [(U_1 \cap U_2)] \cup \\ &\quad \cup [(U_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap U_2) \cup (V_1 \cap V_2)] \cap A = \\ &= U \cup (V \cap A) \in T^* \end{aligned}$$

donde $U = U_1 \cap U_2 \in T$ y

$V = (U_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap U_2) \cup (V_1 \cap V_2)$ que también es un abierto de la topología T .

Luego T^* es una topología definida en el conjunto X .

Si hacemos $V = \phi$, para todo $U \in T$ resulta:

$$U = U \cup (\phi \cap A) \in T^*$$

por lo que siempre es $T \subset T^*$. En caso de que $A \notin T$, al ser $A = \phi \cup (X \cap A) \in T^*$ la inclusión $T \subset T^*$ es estricta y es $T \neq T^*$. Si $A \in T$, para todo $U \cup (V \cap A) \in T^*$ es $U \cup (V \cap A) \in T$ y en este caso las dos topologías son iguales ($T = T^*$).

* * *

- 1.2. En el conjunto N de los números naturales probar que:

$$T = \{A \subset N \mid \text{Si } 2n+1 \notin A \text{ entonces } 2n, 2n+2 \notin A\}$$

es una topología de N .

SOLUCION.—

1. Veamos en primer lugar que si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de partes de N tal que $A_i \in T$ para todo índice $i \in I$, entonces

$$\text{es } \bigcup_{i \in I} A_i \in T:$$

Si $2n+1 \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ para todo $i \in I$ es $2n+1 \notin A_i$ y en consecuencia $2n, 2n+2 \notin A_i$ cualquiera que sea $i \in I$ y así $2n, 2n+2 \notin \bigcup_{i \in I} A_i$. Luego, $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$.

2. Si $A_1, A_2 \in T$, sea $2n+1 \notin A_1 \cap A_2$. Si $2n+1 \notin A_1$ entonces $2n, 2n+2 \notin A_1$ y por tanto $2n, 2n+2 \notin A_1 \cap A_2$. Análogamente si $2n+1 \notin A_2$. Es decir, $A_1 \cap A_2 \in T$.
3. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $2n, 2n+1, 2n+2 \notin \phi$ es evidente que $\phi \in T$. Asimismo, los conjuntos $\{0, 1, \dots, 2n+1\} \in T$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Así pues:

$$N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1, \dots, 2n+1\} \in T$$

Luego T es una topología definida sobre N .

* * *

- 1.3. En el conjunto Z de los números enteros se considera la familia T de partes de Z :

$$T = \{M \subset Z \mid 0 \notin M \text{ ó } Z - M \text{ es finito}\}$$

- a) Probar que (Z, T) es un espacio topológico.
- b) Caracterizar los entornos de 0 y 1 en (Z, T) .
- c) ¿Cumple (Z, T) los axiomas primero y segundo de numerabilidad?

SOLUCION.—

- a) 1. Como $0 \notin \phi$ y $Z - Z = \phi$ es un conjunto finito, $\phi, Z \in T$.
2. Si $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos de T y para todo $i \in I$ es $0 \notin M_i$ entonces

$$0 \notin \bigcup_{i \in I} M_i \text{ y } \bigcup_{i \in I} M_i \in T.$$

Si $0 \in \bigcup_{i \in I} M_i$, sea $I_0 = \{j \in I \mid 0 \in M_j\}$. Como $M_i \in T$ para todo $i \in I$, si $j \in I_0$, $Z - M_j$ es un conjunto finito y así:

$$Z - \bigcup_{i \in I} M_i \subset Z - \bigcup_{j \in I_0} M_j = \bigcap_{j \in I_0} (Z - M_j)$$

Al ser $\bigcap_{j \in I_0} (Z - M_j)$ un conjunto finito, también lo será

$Z - \bigcup_{i \in I} M_i$ y en consecuencia, $\bigcup_{i \in I} M_i \in T$.

3. Si $M_1, M_2 \in T$ y $0 \notin M_1 \cap M_2$ entonces $M_1 \cap M_2 \in T$. En el caso en que $0 \in M_1 \cap M_2$, al ser $0 \in M_1$ y $0 \in M_2$ los conjuntos $Z - M_i$ son finitos ($i = 1, 2$) por lo que tenemos:

$$Z - (M_1 \cap M_2) = (Z - M_1) \cup (Z - M_2)$$

y este conjunto es también finito. Luego, $M_1 \cap M_2 \in T$.

- b) Si $V \in E(0)$ existe un abierto M de (Z, T) tal que $0 \in M \subset V$. Por ser $M \in T$ y $0 \in M$, $Z - M$ es un conjunto finito y al ser $Z - V \subset Z - M$, $Z - V$ también es finito. Recíprocamente, si $0 \in V$ y $Z - V$ es finito, $V \in E(0)$ por ser abierto. Por tanto:

$$E(0) = \{V \subset Z \mid 0 \in V \text{ y } Z - V \text{ es finito}\}$$

Por otra parte, los entornos de 1 quedan definidos como

$$E(1) = \{V \subset Z \mid 1 \in V\}$$

pues si $0 \notin V$, V es abierto. Asimismo, si $\{0, 1\} \subset V$, se tiene $1 \in V - \{0\} \subset V$ y como $V - \{0\}$ es abierto ($0 \notin V - \{0\}$), $V \in E(1)$.

- c) Veamos que (Z, T) cumple el primer axioma de numerabilidad: Una base de entornos de $n \neq 0$ es la familia $B(n) = \{\{n\}\}$, que es numerable. Una base de entornos de 0 es $B(0) = E(0)$ y como el cardinal de $E(0)$ es menor o igual que el cardinal del conjunto de las partes finitas de Z , es numerable.

Por ser Z un conjunto numerable, la base de T :

$$B = \{\{n\} \mid n \neq 0\} \cup \{V \subset Z \mid 0 \in V \text{ y } Z - V \text{ finito}\}$$

es numerable y por tanto (Z, T) cumple el segundo axioma de numerabilidad.

• • •

- 1.4. En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se define la familia T de partes de $\mathbb{R}$ como:

$$T = \{\mathbb{R}\} \cup \mathcal{P}(\mathbb{R} - M)$$

donde $M = \{1, 3\}$.

- Probar que $(\mathbb{R}, T)$ es un espacio topológico.
- Describir una base de entornos de 2 y una base de entornos de 0 en $(\mathbb{R}, T)$.
- Estudiar si alguno de los dos puntos 2 y 0 tiene una base de entornos cerrados.

SOLUCION.—

- La comprobación de que T es una topología de $\mathbb{R}$ es inmediata, por lo que la omitimos.
- Como 2 $\in M$ el único abierto que contiene al punto 2 es el propio $\mathbb{R}$ por lo que $B(2) = \{\mathbb{R}\}$.
Al ser 0 $\notin M$, si $A \neq \mathbb{R}$ es un abierto tal que 0 $\in A$ deberá ser $A \subset \mathbb{R} - M$, por lo que una base de entornos de 0 es $B(0) = \{\{0\}\}$. Los entornos de 0 son exactamente los conjuntos cerrados.
- Es evidente que $B(2) = \{\mathbb{R}\}$ es una base de entornos cerrados de 2. Por otra parte, si C es un cerrado de $(\mathbb{R}, T)$ tal que 0 $\in C$ será $M \subset C$ y así, ningún cerrado en estas condiciones puede estar contenido en $\{0\} \in B(0)$. Luego, 0 no tiene ninguna base de entornos cerrados.

* * *

- 1.5. Sea (X, T) un espacio topológico tal que si $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado. Probar que la intersección de todos los entornos de x es igual a $\{x\}$.

SOLUCION.—Consideremos la familia $E(x)$ de todos los entornos de x . Evidentemente, $x \in \bigcap_{V \in E(x)} V$; si $y \neq x$, al ser $\{y\}$ un conjunto cerrado, $X - \{y\}$ es abierto con $x \in X - \{y\}$. Es decir, $X - \{y\}$ es un entorno de x que no contiene a y ; luego $y \notin \bigcap_{V \in E(x)} V$.

En consecuencia:

$$\{x\} = \bigcap_{V \in \mathcal{U}_x} V.$$

Recíprocamente, si la intersección de los entornos de cualquier punto $x \in X$ coincide con $\{x\}$, para todo $x \notin \{x\}$ existe un entorno W de x que no contiene a x ; por lo tanto, $W \subset X - \{x\}$ y así $X - \{x\}$ es abierto y $\{x\}$ será cerrado, cualquiera que sea $x \in X$.

□ □ □

1.6. Dadas las familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\} & B_2 &= \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ B'_1 &= \{[p, q] \mid p, q \in \mathbb{Q}\} & B'_2 &= \{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

Probar:

- Sean base de alguna topología de $\mathbb{R}$.
- Si llamamos $T_1 = T(B_1)$ y $T_2 = T(B_2)$ con $i = 1, 2$, es $T_1 \neq T_2$.
- Si T_0 es la topología usual de $\mathbb{R}$, entonces $T_0 = T_1 \cap T_2 = T'_1 \cap T'_2$.

SOLUCIÓN:—

- a) Lo probaremos solamente para B_1 : Sean $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in B_1$ y sea $x \in [a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$. Como $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = [a, b] \in B_1$ con

$$a = \max(a_1, a_2), \quad b = \min(b_1, b_2),$$

se tiene $x \in [a, b] \subset [a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$. Como $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} [a, b] \in B_1$ es base de una topología (T_1) de $\mathbb{R}$.

Los restantes casos se demuestran de manera análoga.

- b) Veamos que $T_1 \neq T'_1$ (de igual forma se ve que $T_2 \neq T'_2$): Si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $[\alpha, \rightarrow) \in T_1$, mientras que $[\alpha, \rightarrow) \notin T'_1$ ya que es imposible encontrar un conjunto $[p, q] \in B'_1$ tal que $\alpha \in [p, q] \subset [\alpha, \rightarrow)$.

- c) Como sabemos, una base de T_a es $B = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ así como $B' = \{(p, q) | (p, q) \in \mathbb{Q}\}$.

Veamos en primer lugar que $T_a \subset T_1 \cap T_2$: Para todo $(a, b) \in B$ es

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + 1/2^n, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, b - 1/2^n].$$

Luego $(a, b) \in T_1 \cap T_2$. Por otra parte, sea $A \in T_1 \cap T_2$; es decir $A \in T_1$ y $A \in T_2$. Si $x \in A$, existen conjuntos $[a_1, b_1)$ y $(a_2, b_2]$ tales que $x \in [a_1, b_1) \subset A$ y $x \in (a_2, b_2] \subset A$. En consecuencia, $x \in [a_1, b_1) \cup (a_2, b_2] \subset A$ y podemos comprobar que existe un intervalo abierto (a, b) de manera que tenemos $x \in (a, b) \subset A$ (ver Fig. 1) y por lo tanto $A \in T_a$.

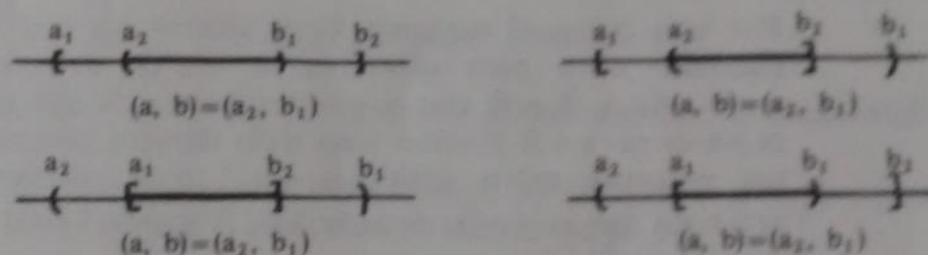


Figura 1

Probamos que $T_a = T_1 \cap T_2$ de manera semejante tomando como referencia la base B' de T_a .

* * *

1.7. En el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales se define:

$$B = \{A \subset \mathbb{N} | \text{Para todo } x \in A \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que si } m \geq n \text{ entonces es } m \cdot x \in A\}.$$

- a) Probar que B es base de una topología T de $\mathbb{N}$.
 b) En $(\mathbb{N}, T)$ calcular el interior, la adherencia y la frontera de:

$$F = \{2n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$$

$$G = \{n \in \mathbb{N} | n = 3k \text{ o } n = 5k \text{ (} k \in \mathbb{N})\}$$

SOLUCION.—

a) Es obvio que $N \in B$ por lo que resulta inmediato que $\bigcup_{A \in B} A = N$. Asimismo, dados $A_1, A_2 \in B$ y $x \in A_1 \cap A_2$ existen $n_1, n_2 \in N$ tales que si $m \geq n_1$ entonces $m \cdot x \in A_1$; y $m \cdot x \in A_2$ si $m \geq n_2$. Luego, para $m \geq \max(n_1, n_2)$ es $m \cdot x \in A_1 \cap A_2$; es decir $A_1 \cap A_2 \in B$ y B es base de una topología T de N .

b) Observemos que si $M \in T$, $M \neq \phi$ entonces M contiene siempre números pares, por lo que $M \not\subset F$ y es $\bar{M} = \phi$. El conjunto $P = \{2n | n \in N\}$ es un conjunto abierto y en consecuencia $F = N - P$ es cerrado y $\bar{F} = F$. Asimismo, $Fr(F) = \bar{F} - F = F$.

Por otra parte, el conjunto G es abierto, ya que si $x \in G$ tomando $n = x$ para $m \geq n$ es $m \cdot x \in G$; así, $\bar{G} = G$. Si $x \in N - G$ y $A \in B$ con $x \in A$, existe $n \in N$ tal que para $m \geq n$ es $m \cdot x \in A$ y como para todo número natural n existen números $m \geq n$ múltiplos de 3 ó 5, siempre existe $m \geq n$ tal que $m \cdot x \in G$; es decir, $\bar{G} = N$ y será $Fr(G) = N - G$.

* * *

1.8. Sea $X = R^2 - \{(0, 0)\}$; para todo punto $(x, y) \in X$ se define:

$$E(x, y) = \{V \subset X | (tx, ty) \in V, 0 < t \leq 1\}$$

- Probar que $E(x, y)$ es un sistema de entornos de (x, y) para una topología T de X .
- Estudiar si (X, T) cumple los axiomas primero y segundo de numerabilidad.
- ¿Es (X, T) un espacio separable?
- Calcular en (X, T) el interior, la adherencia y la frontera del conjunto:

$$M = \{(x, y) \in X | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

SOLUCION.—

a) Para que $E(x, y)$ sea el sistema de entornos de (x, y) en una topología T de X debe cumplirse:

- E.1. Si $V \in E(x, y)$ entonces $(x, y) \in V$.
- E.2. Si $V \in E(x, y)$ y $V \subset W$ se cumple que $W \in E(x, y)$.
- E.3. Si $V, W \in E(x, y)$ también $V \cap W \in E(x, y)$.
- E.4. Si $V \in E(x, y)$, existe $W \subset V$ tal que $W \in E(x, y)$ y si $(x', y') \in W$ se verifica que $V \in E(x', y')$.

Por la propia definición de la familia $E(x, y)$, E1, E2 y E3 son inmediatas. Para comprobar E4 es suficiente tomar $W = \{(tx, ty) | 0 < t \leq 1\}$ para cualquier $V \in E(x, y)$.

b) Para cada $(x, y) \in X$, una base de entornos del mismo es:

$$B(x, y) = \{\{(tx, ty) | 0 < t \leq 1\}\}$$

y por tanto (X, T) cumple el primer axioma de numerabilidad.

Consideremos ahora el conjunto $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ y para cada $(x, y) \in S$ tomemos el abierto de (X, T) :

$$A_{xy} = \{(tx, ty) | 0 < t \leq 1\}$$

Si B es una base de la topología T , para cada elemento $(x, y) \in S$ existe un conjunto $B_{xy} \in B$ tal que $(x, y) \in B_{xy} \subset A_{xy}$. Establecemos así una aplicación:

$$\sigma : S \longrightarrow B$$

de manera que $\sigma(x, y) = B_{xy} \in B$, donde B_{xy} está elegido entre aquellos que cumplen $(x, y) \in B_{xy} \subset A_{xy}$. Para $(x', y') \neq (x, y)$ en S se tiene $A_{x'y'} \cap A_{xy} = \emptyset$, por lo que $B_{x'y'} \neq B_{xy}$ y σ es una aplicación inyectiva y así, $\text{Card}(S) \leq \text{Card}(B)$. Como S es un conjunto no numerable, tampoco lo puede ser B por lo que (X, T) no cumple el segundo axioma de numerabilidad.

c) Consideremos los conjuntos $\{A_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ donde:

$$A_k = \{(x, y) | y = kx\} \cap X$$

que son abiertos en (X, T) . Si D es denso en todo el espacio X para cada $k \in \mathbb{R}$, $A_k \cap D \neq \emptyset$, y como los conjuntos A_k

son disjuntos dos a dos el conjunto: $\{x_k \in X | x_k \in A_k \cap D\}$ es no numerable, por lo que tampoco lo es D y el espacio (X, T) no es separable.

- d) Se comprueba fácilmente que $\bar{M} = M$, $\bar{M} = X$ y $Fr(M) = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1\}$.

* * *

- 1.9. Probar que en $(\mathbb{R}, T_u)$ no existe ninguna familia numerable de abiertos $\mathcal{V}$ tal que si A es abierto y $Z \in A$ existe $V \in \mathcal{V}$ que cumple $Z \subset V \subset A$.

SOLUCION.—Sea una familia numerable de abiertos:

$$\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_n, \dots\}$$

tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $Z \subset V_n$. Vamos a ver que $\mathcal{V}$ no cumple la condición exigida:

Como $0 \in V_0$ existe ε_0 tal que $0 < \varepsilon_0 < 1/3$ con $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset V_0$. Asimismo, existe ε_1 con $0 < \varepsilon_1 < 1/3$ y $(1 - \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_1) \subset V_1$; así sucesivamente, para cada número natural n existe ε_n verificando $0 < \varepsilon_n < 1/3$, $(n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n) \subset V_n$.

Ahora, el abierto:

$$A = (-\infty, -2/3) \cup \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n - \varepsilon_n/2, n + \varepsilon_n/2) \right]$$

es tal que $Z \subset A$ mientras que para todo número natural n se cumple que $V_n \not\subset A$.

* * *

- 1.10. En $X = \mathbb{R}^2$ se considera la topología T cuya sub-base es:

$$S = \{\{(x, y) | y = k\} | k \in \mathbb{R}\} \cup \{\{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}\}$$

Calcular en (X, T) el interior, la adherencia y la frontera de los siguientes conjuntos:

$$A = \{(x, y) | y = x + k, 0 \leq k \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y) | -1 \leq y \leq 1\}$$

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$$

SOLUCION.—Una base de (X, T) es la familia formada por los conjuntos $A_k = \{(x, y) | y = k\}$ para cada $k \in \mathbb{R}$ junto con los conjuntos $\{(0, y)\}$ con $y \in \mathbb{R}$. Así, fácilmente se comprueba que es:

$$\bar{A} = \{(0, y) | 0 \leq y \leq 1\}$$

$$A = \{(x, y) | x \neq 0\} \cup \{(0, y) | 0 \leq y \leq 1\}$$

$$Fr(A) = X - \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}$$

$$\bar{B} = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}$$

$$\bar{B} = X \quad Fr(B) = \{(x, y) | x \neq 0\}$$

$$\bar{C} = C \quad \bar{C} = C \quad Fr(C) = \emptyset$$

$$\bar{D} = \{(0, -1), (0, 1)\}$$

$$\bar{D} = \{(x, y) | -1 \leq y \leq 1, x \neq 0\} \cup \{(0, -1), (0, 1)\}$$

$$Fr(D) = \{(x, y) | -1 \leq y \leq 1\}$$

* * *

- 1.11. En un conjunto no vacío X se consideran dos bases B_1 y B_2 de sendas topologías definidas sobre X . Probar que $T(B_1) \subset T(B_2)$ si y sólo si para todo $A_1 \in B_1$ y todo $x \in A_1$ existe $A_2 \in B_2$ tal que $x \in A_2 \subset A_1$.

SOLUCION.—Supongamos que $T(B_1) \subset T(B_2)$; entonces, todo $A_1 \in B_1$ es $A_1 \in T(B_2)$ por lo que si $x \in A_1$ existe $A_2 \in B_2$ tal que $x \in A_2 \subset A_1$.

1. $a_1 \leq x \leq b_n$ $x \in (\leftarrow, a_1] \cup \{x\} \cup [b_n, \rightarrow) \in A$
2. $x \leq a_1$ $x \in (\leftarrow, a_1] \cup \{b_n\} \cup [b_n + 1, \rightarrow) \in A$
3. $b_n \leq x$ $x \in (\leftarrow, a_1 - 1] \cup \{a_1\} \cup [b_n, \rightarrow) \in A$

y en consecuencia, $T \in T(B)$. Luego, $T(B) = T$.

b) Para todo $x \in R$,

$$B(x) = \{(\leftarrow, x - q] \cup \{x\} \cup [x + q, \rightarrow) \mid q > 0, q \in Q\}$$

es una base numerable de entornos de x . Por tanto, (R, T) verifica el primer axioma de numerabilidad.

Si B' es una base de T , consideremos los abiertos

$$A_x = (\leftarrow, 0] \cup \{x\} \cup [1, \rightarrow)$$

con $x \in (0, 1)$. Ahora, para cada $x \in (0, 1)$ fijamos un conjunto $M'_x \in B'$ tal que $x \in M'_x \subset A_x$, lo que establece una aplicación $\sigma: (0, 1) \rightarrow B'$. Esta aplicación es inyectiva, ya que si $x \neq x'$ en $(0, 1)$ también $M'_x \neq M'_{x'}$, por lo que $\text{card}(0, 1) \leq \text{card}(B')$ y la base B' no puede ser numerable. El espacio (R, T) no verifica pues el segundo axioma de numerabilidad.

c) Sea D un conjunto no acotado de R ; dado un conjunto arbitrario $M = (\leftarrow, a] \cup \{x\} \cup [b, \rightarrow) \in B$ existen elementos $y \in D$ tales que $y \leq a$ o bien $b \leq y$, y así $M \cap D \neq \emptyset$. Es decir, D es un conjunto denso en el espacio (R, T) .

Asimismo, si D es un conjunto acotado en R y $x \notin D$, para $a < \inf(D)$ y $b > \sup(D)$ el conjunto $V = (\leftarrow, a] \cup \{x\} \cup [b, \rightarrow)$ es un entorno de x tal que es $V \cap D = \emptyset$ y D no es denso en (R, T) .

Concluimos pues que D es denso en (R, T) si y sólo si es un conjunto no acotado en R . Luego, el espacio (R, T) es separable ya que Z es un conjunto numerable y denso en el mismo.

* * *

1.14. Sea R con la topología:

$$T = \{\emptyset\} \cup \{M \subset R \mid Q - M \text{ es un conjunto finito}\}$$

- a) Comprobar que, en efecto, T es una topología del conjunto $\mathbb{R}$.
- b) En el espacio $(\mathbb{R}, T)$ hallar el interior, la adherencia y la frontera de Q y $\mathbb{R} - Q$.
- c) ¿Cumple $(\mathbb{R}, T)$ alguna de los axiomas de numerabilidad?

SOLUCIÓN:

- a) La comprobación de que T verifica los axiomas de una topología es inmediata y la omitimos.
- b) Observemos, en primer lugar, que Q es un conjunto abierto en este espacio por lo que $\bar{Q} = Q$ y $\overline{\mathbb{R} - Q} = \mathbb{R} - Q$.

Si $x \in \mathbb{R} - Q$ y $V \in \mathcal{E}(x)$, como $Q - V$ ha de ser finito, $V \cap Q \neq \emptyset$, lo que implica que $Q = \mathbb{R}$, $(\mathbb{R} - Q)^c = \emptyset$ y así, $\text{Fr}(Q) = \text{Fr}(\mathbb{R} - Q) = \mathbb{R} - Q$.

- c) Si $x \in Q$ la familia:

$$B(x) = \{V \subset Q \mid Q - V \text{ es finito, } x \in V\}$$

es una base de entornos de x y $\text{card}(B(x)) \leq \text{card}(\mathcal{P}_f(Q))$ donde $\mathcal{P}_f(Q)$ es el conjunto de las partes finitas de Q , que es un conjunto numerable. Si $x \in \mathbb{R} - Q$, una base de entornos de x es la familia:

$$B(x) = \{V \cup \{x\} \mid V \subset Q, Q - V \text{ es finito}\}$$

y tenemos ahora que $\text{card}(B(x)) = \text{card}(\mathcal{P}_f(Q))$. En ambos casos la base de entornos del punto x es numerable y en consecuencia el espacio $(\mathbb{R}, T)$ cumple el primer axioma de numerabilidad.

Para todo $x \in \mathbb{R} - Q$ consideremos el abierto del espacio: $\{x\} \cup Q$; si B es una base de T , fijemos un elemento $A_x \in B$ tal que $x \in A_x \subset \{x\} \cup Q$. Tenemos así una aplicación inyectiva $\sigma: (\mathbb{R} - Q) \rightarrow B$, lo que lleva consigo que $\text{card}(B) \geq \text{card}(\mathbb{R} - Q)$ y B no puede ser numerable. Luego $(\mathbb{R}, T)$ no verifica el segundo axioma de numerabilidad.

* * *

1.17. Sea X un conjunto no vacío; consideremos las familias:

$$\begin{aligned} T_{CF} &= \{A \subset X \mid A = \emptyset \text{ ó } X - A \text{ es finito}\} \\ T_{CN} &= \{A \subset X \mid A = \emptyset \text{ ó } X - A \text{ es numerable}\} \end{aligned}$$

Probar que ambas son topologías de X y determinar, según el cardinal de X , si los espacios correspondientes cumplen los axiomas primero y segundo de numerabilidad.

SOLUCION.—Omitimos la comprobación de que T_{CF} y T_{CN} son topologías del conjunto X .

Si X es un conjunto finito las dos topologías coinciden y además son la topología discreta de X . En este caso, tanto T_{CF} como T_{CN} cumplen los axiomas primero y segundo de numerabilidad.

Si X es un conjunto numerable, entonces

$$\text{card}(T_{CF}) = \text{card}(\mathcal{P}_f(X))$$

es decir, T_{CF} es numerable y por tanto, verifica los axiomas primero y segundo de numerabilidad.

Siendo X numerable, T_{CN} es la topología discreta de X y en consecuencia, cumple el primer axioma de numerabilidad. Asimismo, $B = \{\{x\} \mid x \in X\}$ es una base numerable de T_{CN} que verifica así el segundo axioma de numerabilidad.

Si X es no numerable y $x \in X$ consideremos los abiertos $B = \{B_0, B_1, \dots, B_n, \dots\}$ de T_{CF} (resp. T_{CN}) tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x \in B_n$. Como $X - B_n$ es finito (resp. numerable) para cada n , el conjunto:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X - B_n) = X - \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

es también numerable y por lo tanto distinto de todo X . Luego,

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$, para $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$, con $z \neq x$, el conjunto $V = X - \{z\}$ es un entorno de x mientras que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $B_n \not\subset V$ pues $z \in B_n$ y $z \notin V$. En consecuencia, B no es una base de entornos de x en (X, T_{CF}) (resp. (X, T_{CN})) y ninguno de los dos espacios

cios cumple el primer axioma de numerabilidad y por lo tanto tampoco el segundo.

* * *

1.18. En $\mathbb{R}^n$ se define la familia:

$$C = \{\mathbb{R}^n\} \cup \{A \subset \mathbb{R}^n \mid \text{existe } I = [a, b] \in \mathbb{R} \text{ con } A \in I^n\}$$

- Probar que C es la familia de cerrados de una topología T de $\mathbb{R}^n$.
- Estudiar los axiomas de numerabilidad de $(\mathbb{R}^n, T)$.
- Determinar si $(\mathbb{R}^n, T)$ es separable.

SOLUCION:

1. Evidentemente, $\phi, \mathbb{R}^n \in C$.
2. Si $\{A_j\}_{j \in J}$ es una familia de conjuntos tales que para todo $j \in J$ es $A_j \in C$ entonces, para un $j_0 \in J$ dado existe $I_0 = [a_0, b_0]$ tal que $A_{j_0} \subset I_0^n$ y además:

$$\bigcap_{j \in J} A_j \subset A_{j_0} \subset I_0^n$$

$$A_j \in C,$$

lo que significa que $\bigcap_{j \in J} A_j \in C$.

3. Dados $A_1, A_2 \in C$ existen intervalos $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$ de manera que $A_1 \subset I_1^n$, $A_2 \subset I_2^n$ por lo que $A_1 \cup A_2 \subset I_1^n \cup I_2^n \subset I^n$ donde $I = [a, b]$ con

$$a = \max(a_1, a_2), \quad b = \max(b_1, b_2).$$

- b) Para $x \in \mathbb{R}^n$, una base de entornos del punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es:

$$B(x) = \{\{x\} \cup (\mathbb{R}^n - I^n) \mid x \in I^n\}$$

y para obtener una base numerable es suficiente tomar los intervalos I con extremos racionales y $x \in I^n$.

Por otra parte, si $I = [0, 1]$, los conjuntos

$$M_x = \{x\} \cup (X' - V)$$

con $x \in V$ son abiertos. Si $\mathcal{B}$ es una base de T , para cada $x \in V$ podemos fijar un conjunto $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset M_x$, con lo que se establece una aplicación inyectiva de $[0, 1]$ en $\mathcal{B}$ y por lo tanto no puede haber ninguna base numerable de T .

- c) Fácilmente se comprueba que Z' es denso en (X', T) y el espacio es separable.

* * *

- 1.19. Sea (X, T) un espacio topológico separable. Probar que toda familia de abiertos de X no vacíos y disjuntos dos a dos es numerable.

SOLUCION.—Si (X, T) es separable, existe un conjunto numerable D tal que $D = X$. Por ser D denso en X , todo abierto no vacío A de X tiene intersección no vacía con D .

Luego, si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos no vacíos y disjuntos dos a dos, podemos definir una aplicación suprayectiva

$$\sigma: D \longrightarrow I$$

con $\sigma(x) = i \in I$ tal que $x \in D \cap A_i$. Así pues, $\text{card}(I) \leq \text{card}(D)$ y la familia dada es numerable por serlo el conjunto D .

* * *

- 1.20. Demostrar que si (X, T) es un espacio topológico que cumple el segundo axioma de numerabilidad, toda familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de abiertos del mismo tal que:

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i$$

tiene una subfamilia numerable $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}, \dots\}$ cuya unión es todo X .

De acuerdo con esto podemos comprobar que es:

$$\dot{A} = \phi \quad \bar{A} = \{(x, 0) | 0 < x \leq 1\} \cup \{(x, 1) | 0 \leq x < 1\} \quad \text{Fr}(A) = \bar{A}$$

$$\dot{B} = \phi \quad \bar{B} = \{(x, y) | x \in Q, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y \in \{0, 1\}\} \quad \text{Fr}(B) = \bar{B}$$

$$\dot{C} = C \quad \bar{C} = [C \cup \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y \in \{0, 1\}\}] - \{(0, 0), (1, 1)\} \quad \text{Fr}(C) = \{(x, 0) | 0 < x \leq 1\} \cup \{(x, 1) | 0 \leq x < 1\}$$

$$\dot{D} = \phi \quad \bar{D} = X \quad \text{Fr}(D) = X$$

$$\dot{E} = \phi \quad \bar{E} = E \cup \{(0, 1)\} \quad \text{Fr}(E) = \bar{E}$$

$$\dot{F} = \phi \quad \bar{F} = F \cup \{(x, 0) | 0 < x \leq 1\} \cup \{(x, 1) | 0 \leq x < 1\} \quad \text{Fr}(F) = \bar{F}$$

* * *

1.25. Sea (X, T) un espacio topológico y sea $A \in T$.

- Probar que para todo $B \subset X$ es $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
- Dar un ejemplo que no verifique la igualdad por ser $A \notin T$.

- Hay que probar solamente que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, ya que la inclusión contraria es evidente.

Si $x \notin \overline{A \cap B}$ existe un abierto $V \in T$ con $x \in V$ tal que $V \cap (A \cap B) = (V \cap A) \cap B = \phi$. Es decir, $B \subset X - (V \cap A)$ y como $X - (V \cap A)$ es cerrado, $\bar{B} \subset X - (V \cap A)$ de donde $(V \cap A) \cap \bar{B} = V \cap (A \cap \bar{B}) = \phi$ y $x \notin \overline{A \cap \bar{B}}$.

- Podemos tomar, en (R, T_u) los conjuntos $A = Q \notin T$, $B = R - Q$, y en este caso:

$$\overline{A \cap \bar{B}} = \overline{Q \cap (\bar{R} - \bar{Q})} = \bar{Q} = R$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{Q \cap (R - Q)} = \bar{\phi} = \phi$$

y ambos conjuntos son distintos.

* * *

- 1.28. Si (X, T) es un espacio topológico tal que para todo $x \in X$ el conjunto $[x]$ es cerrado, probar que para todo $A \subset X$ el conjunto A' de todos los puntos de acumulación de A es un conjunto cerrado.

SOLUCION.—Llamemos A' al conjunto de puntos de acumulación de A ; entonces A' es cerrado si $(A')' \subset A'$.

Sea $x'' \in (A')'$; para todo $V \in E(x'')$ abierto existe $x' \neq x''$ tal que $x' \in A' \cap V$. Como en (X, T) todo punto es un conjunto cerrado, el conjunto $X - \{x''\}$ es abierto, por lo que existe un entorno abierto W de x' que verifica que $x'' \notin W$.

Llamemos $U = V \cap W$; como $x' \in U$ y U es abierto, U es un entorno de x' tal que $x'' \notin U$.

Puesto que $x' \in A'$, $U \cap (A - \{x'\}) \neq \emptyset$; para el elemento $x \in U \cap (A - \{x'\})$, se tiene $x \neq x''$ y así, para todo $x'' \in (A')'$ y todo entorno abierto $V \in E(x'')$ existe $x \neq x''$ tal que $x \in V \cap A$; es decir, $x'' \in A'$.

En consecuencia $(A')' \subset A'$ y el conjunto A' de puntos de acumulación de A es cerrado.

* * *

- 1.29. Probar que, en un espacio topológico, $\overline{A - B} \subset \overline{A} - \overline{B}$ y dar un ejemplo que muestre que la igualdad de ambos conjuntos puede no ser cierta.

SOLUCION.—Si $\overline{A - B} = \emptyset$ la inclusión propuesta es evidente. Sea ahora $x \in \overline{A - B}$; todo entorno $V \in E(x)$ verifica que $X \cap A \neq \emptyset$ y además existe $W \in E(x)$ tal que $W \cap B = \emptyset$. Si para algún $V \in E(x)$ fuera $V \cap (A - B) = \emptyset$ como $V \cap (A - B) = V \cap A \cap (X - B)$, al ser $V \cap A \neq \emptyset$ sería $V \cap A \subset B$ y ahora, para $U = V \cap W \in E(x)$ se tiene $U \cap A = (V \cap W) \cap B = V \cap (W \cap B) = \emptyset$ contra la hipótesis de que todo entorno de x tiene intersección no vacía con A . Luego, para cualquier $V \in E(x)$ es $V \cap (A - B) \neq \emptyset$ y en consecuencia $x \in \overline{A - B}$.

Si en (R, T_a) tomamos $A=Q$, $B=R-Q$ será:

$$\overline{A-B} = \overline{Q-(R-Q)} = R-R = \phi$$

$$\overline{A-B} = \overline{Q-(R-Q)} = \overline{Q} = R$$

y ambos conjuntos son distintos.

* * *

- 1.30. En $X=[0, 1] \subset \mathbb{R}$ se considera la topología T cuya base es la familia:

$$B = \{X\} \cup \{(0, 1-1/n) | n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}\}$$

Calcular la adherencia de los siguientes conjuntos en el espacio (X, T) :

$$A = \{0\}$$

$$C = \{1/2\}$$

$$D = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$$

SOLUCION.— $\overline{A} = \{0, 1\}$ ya que si $x \notin \{0, 1\}$ existe un número natural $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ tal que $0 < x < 1 - 1/n$ y el conjunto $V = (0, 1 - 1/n) \in E(x)$ es tal que $V \cap A = \phi$ mientras que por el contrario, $E = \{X\}$ y $1 \in \overline{A}$.

$\overline{C} = \{x \in X | x=0 \text{ ó } 1/2 \leq x \leq 1\}$, pues si se cumple $0 < x < 1/2$, el conjunto $V = (0, 1/2)$ es un entorno de x tal que $V \cap C = \phi$. Si $x=0$ ó bien $1/2 \leq x \leq 1$ es evidente que $x \in \overline{C}$.

$\overline{D} = X$ puesto que, como se comprueba con facilidad, si un conjunto contiene algún punto x tal que $0 < x < 1/2$ es un conjunto denso en todo X .

* * *

- 1.31. Probar que un espacio topológico (X, T) si A y B son subconjuntos arbitrarios de X se verifica:

$$A \cup B = X \text{ implica } \overline{A} \cup \overline{B} = X$$

$$A \cap B = \phi \text{ implica } \overline{A} \cap \overline{B} = \phi$$

SOLUCION:

- a) Si $A \cup B = X$ entonces $X - A \subseteq B$, por lo que $(X - A)^a \subseteq \hat{B}$.
Luego $X - A \subseteq \hat{B}$, lo que lleva consigo que $A \cup \hat{B} = X$.
- b) Si $A \cap B = \phi$ es $A \subseteq X - B$ y entonces se tiene $\bar{A} \subseteq \overline{X - B}$
 $= X - \hat{B}$; es decir, $\bar{A} \cap \hat{B} = \phi$.

* * *

- 1.32. Demostrar que A es un abierto de un espacio topológico (X, T) si y solamente si para todo $M \subseteq X$ tal que $M \cap A = \phi$ también es $\bar{M} \cap A = \phi$.

SOLUCION.—Supongamos que A es abierto en X y que $M \cap A = \phi$; si $x \in \bar{M} \cap A$, como $A \in E(x)$ y $x \in \bar{M}$ sería $M \cap A \neq \phi$ lo que es imposible.

Recíprocamente, si $M \cap A = \phi$ implica que $\bar{M} \cap A = \phi$ para $M \subseteq X$, tomando $M = X - A$ se tiene que $X - A \cap A = \phi$ y ahora, como $\overline{X - A} = X - \hat{A}$, ocurre que $A \subseteq \hat{A}$ y el conjunto A es abierto.

* * *

- 1.33. En un conjunto no vacío X se define una aplicación:

$$\sigma: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

tal que para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ es:

1. $\sigma(A) \subseteq A$
2. $\sigma(A \cap B) = \sigma(A) \cap \sigma(B)$
3. $\sigma[\sigma(A)] = \sigma(A)$
4. $\sigma(X) = X$

Probar que existe una única topología en X para la cual, si $A \subseteq X$, $\hat{A} = \sigma(A)$.

SOLUCION.—Consideremos la familia:

$$T = \{A \in \mathcal{P}(X) | \sigma(A) = A\}$$

SOLUCION.—En (N, T) tenemos:

$$\begin{aligned} E(n) &= \{P, N\} & \text{si } n=2k \\ E(n) &= \{N\} & \text{si } n=2k+1 \end{aligned}$$

Luego, cualquier base de filtro de (N, T) converge a todo $n \in N$ que sea un número impar. Por tanto:

$$N-P \subset \lim \mathcal{B}_1, \quad N-P \subset \lim \mathcal{B}_2$$

Si n es un número par ($n=2k$) entonces $P \in E(n)$ y para todo $A \in \mathcal{B}_1$ es $A \not\subset P$ ya que en caso contrario sería $N-P \subset N-A$ y esto es imposible pues $N-P$ es un conjunto infinito mientras que $N-A$ es finito. Así:

$$\lim \mathcal{B}_1 = N-P$$

Ahora bien, para todo $A \in \mathcal{B}_1$ es $A \cap P \neq \emptyset$ lo que conlleva que todo número par es de aglomeración de $\mathcal{B}_1$. Luego, todo $n \in N$ es un punto de aglomeración de $\mathcal{B}_1$.

Es evidente que $\lim \mathcal{B}_2 = N-P$ y que éste es el conjunto de puntos de aglomeración de $\mathcal{B}_2$.

* * *

2.30. Determinar si es T_2 el espacio (R, T) con:

$$T = \{\emptyset\} \cup \{A \subset R \mid R-A \text{ cerrado en } T_u \text{ y acotado}\}$$

SOLUCION.—Sean A_1 y A_2 dos abiertos no vacíos del espacio (R, T) ; por tanto, los conjuntos $K_1 = R-A_1$ y $K_2 = R-A_2$ son cerrados en T_u y acotados. Como $K_1 \cup K_2$ es también cerrado en la topología usual de R y es también un conjunto acotado, $R-(K_1 \cup K_2) \neq \emptyset$.

En consecuencia,

$$A_1 \cap A_2 = (R-K_1) \cap (R-K_2) = R-(K_1 \cup K_2) \neq \emptyset$$

y el espacio dado no es un espacio T_2 .

* * *

- 3.4. Sean (X, T) un espacio T_2 e Y un conjunto infinito con la topología T_{CF} de los complementos finitos. Probar que una aplicación $f: (X, T) \longrightarrow (Y, T_{CF})$ tal que para todo $y \in Y$ el conjunto $f^{-1}(y)$ es finito, es una aplicación continua.

SOLUCION.—Los conjuntos cerrados de (Y, T_{CF}) son Y , ϕ y los subconjuntos finitos de Y . Evidentemente, $f^{-1}(Y) = X$, $f^{-1}(\phi) = \phi$ son cerrados en (X, T) .

Si $A \subset Y$ es un conjunto finito, el conjunto

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{y \in A} f^{-1}(y)$$

es finito y como (X, T) es un espacio T_2 , es cerrado (ver ejercicio 2.10). Por lo tanto, f es una aplicación continua.

* * *

- 3.5. Probar que un espacio topológico (X, T) es un espacio discreto si y sólo si toda aplicación

$$f: (X, T) \longrightarrow (R, T_u)$$

es continua.

SOLUCION.—Es evidente que si (X, T) es un espacio discreto, cualquier aplicación $f: (X, T) \longrightarrow (R, T_u)$ es continua.

Recíprocamente, supongamos que toda aplicación

$$f: (X, T) \rightarrow (R, T_u)$$

es continua y sea $A \subset X$ arbitrario con $A \neq \phi$. La aplicación:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in X - A \end{cases}$$

de (X, T) en (R, T_u) es continua, por lo que $f^{-1}\left(\left(\leftarrow, \frac{1}{2}\right)\right) = A$ es abierto. Luego, como todo $A \subset X$ es abierto, la topología T es la topología discreta.

* * *

- 3.6. Probar que si X es un espacio separable y $f: X \rightarrow Y$ es una aplicación continua del espacio X sobre el espacio Y , éste es un espacio separable.

SOLUCION.—Sea D un subconjunto numerable de X tal que $\overline{D} = X$. Como la aplicación f es continua, se cumple:

$$f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$$

y en consecuencia, $Y = f(X) \subset \overline{f(D)}$ por lo que $f(D)$ es un conjunto denso en Y .

Como f es una aplicación, $\text{card}[f(D)] \leq \text{card}(D)$ y como D es numerable también lo es $f(D)$ y el espacio Y es separable.

* * *

- 3.7. Sea X un conjunto infinito con la topología T_{cf} de los complementos finitos. Probar:

- Toda aplicación suprayectiva $f: (X, T_{cf}) \rightarrow (X, T_{cf})$ es una aplicación cerrada. ¿Es f una aplicación abierta?
- Toda biyección de (X, T_{cf}) en sí mismo es un homeomorfismo.

SOLUCION:

- Como en toda aplicación es

$$\text{card}[f(A)] \leq \text{card}(A)$$

para cualquier $A \subset X$ y además, por ser f suprayectiva, $f(X) = X$, la imagen de un conjunto cerrado $A \subset X$ es, o bien X , o bien $\emptyset$, o bien un conjunto finito. Es decir, la aplicación f transforma conjuntos cerrados en conjuntos cerrados.

Observemos que f es asimismo una aplicación abierta: En efecto, si $B \subset X$ es abierto en (X, T_{cf}) con $B \neq \emptyset$ y $B \neq X$, entonces $X - B = F$ es un conjunto finito. Ahora, $f(F) = F_1$ es un conjunto finito y $f(B) = f(X - F) \supset X - F_1$, por ser f exhaustiva. En consecuencia, $X - f(B) \subset F_1$ es un conjunto finito, lo que prueba que $f(B)$ es abierto en (X, T_{cf}) .

- b) Si f es biyectiva, como tanto f como f^{-1} son abiertas, la aplicación f es continua, así como f^{-1} y por lo tanto, f es un homeomorfismo.

* * *

3.8. Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación inyectiva y dotemos Y con la topología discreta T_d . Probar:

- a) Si T es una topología de X entonces $f: (X, T) \longrightarrow (Y, T_d)$ es continua si y sólo si T es la topología discreta de X .
b) Si f no es inyectiva, el resultado anterior puede no verificarse.

SOLUCION:

- a) Si T es la topología discreta de X , la aplicación f es continua con independencia de la topología de Y .

Si f es continua, sea A un subconjunto arbitrario del espacio X . Por ser f inyectiva, para todo $A \subset X$ es $A = f^{-1}[f(A)]$, y por tener Y la topología discreta $f(A) \subset Y$ es abierto. Luego A es abierto en X . Así pues, la topología T es la topología discreta de X .

- b) Consideremos el conjunto R de los números reales con la topología T cuya base es:

$$\mathcal{B} = \{ \{ -x, x \} \mid x \geq 0 \}$$

y el conjunto R_+ de los números reales no negativos con la topología discreta T_d . Evidentemente, T no es la topología discreta de R ya que el único conjunto abierto de un elemento es $\{0\}$; no obstante, la aplicación (no inyectiva):

$$f: (R, T) \longrightarrow (R_+, T_d)$$

$$f(x) = x^2$$

es continua, pues para todo $y \in R_+$ es

$$f^{-1}(\{y\}) = \{ -\sqrt{y}, +\sqrt{y} \} \in T$$

* * *

3.9. Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación suprayectiva y supongamos que X tiene la topología trivial $T_1 = \{X, \phi\}$. Probar:

- Si T es una topología de Y , la aplicación $f: (X, T_1) \longrightarrow (Y, T)$ es continua si y sólo si la topología T es la topología trivial de $Y: T = \{Y, \phi\}$.
- Si f no es suprayectiva, el resultado anterior puede no verificarse.

SOLUCION:

- Si la topología T de Y es trivial, f es continua con independencia de la topología de X .

Si f es continua sea $A \subset Y$ abierto en (Y, T) ; entonces $f^{-1}(A)$ es abierto en (X, T_1) por lo que, o bien $f^{-1}(A) = X$ o bien $f^{-1}(A) = \phi$.

Como f es suprayectiva, para todo $A \subset Y$ es $f[f^{-1}(A)] = A$; por tanto, si $f^{-1}(A) = X$ es $A = f(X) = Y$, y si $f^{-1}(A) = \phi$ se tiene $A = f(\phi) = \phi$, y $T = \{Y, \phi\}$.

- Sea el conjunto R de los números reales con la topología T cuya base es:

$$B = \{\{x\} \mid x < 0\} \cup \{[0, \rightarrow)\}$$

y consideremos el conjunto R con la topología trivial T_1 . La topología T no es trivial, mientras que la aplicación no suprayectiva:

$$f: (R, T_1) \longrightarrow (R, T)$$

definida como $f(x) = x^2$ para todo número real x es continua, ya que para $x < 0$ es $f^{-1}(\{x\}) = \phi \in T_1$ y por otra parte $f^{-1}([0, \rightarrow)) = R \in T_1$.

* * *

3.10. Si (X, T) es un espacio topológico y las aplicaciones:

$$f, g: (X, T) \longrightarrow (R, T_u)$$

SOLUCION:

- a) Si f es continua y cerrada, en virtud de la continuidad de f tenemos $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Además, como f es cerrada, $f(\bar{A})$ es un conjunto cerrado en Y , de donde $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ y ambos conjuntos coinciden.

Recíprocamente, si para todo $A \subset X$ es $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ la aplicación f es continua. Si C es un conjunto cerrado en X entonces $f(C) = \overline{f(C)} = \overline{f(C)}$ y la aplicación f es asimismo cerrada.

- b) Supongamos que f es continua y abierta. Por ser f una aplicación continua, $f^{-1}(\hat{B})$ es abierto en X , y como

$$f^{-1}(\hat{B}) \subset f^{-1}(B) \quad \text{resulta} \quad f^{-1}(\hat{B}) \subset [f^{-1}(B)]^{\circ}.$$

Por otra parte, como f es abierta y

$$[f^{-1}(B)]^{\circ} \subset f^{-1}(B)$$

se tiene que $f[f^{-1}(B)]^{\circ}$ es un abierto del espacio Y y además:

$$f[f^{-1}(B)]^{\circ} \subset f[f^{-1}(B)] \subset B$$

por lo que $f[f^{-1}(B)]^{\circ} \subset \hat{B}$. Luego, $[f^{-1}(B)]^{\circ} \subset f^{-1}(\hat{B})$ y estos dos conjuntos coinciden.

Recíprocamente, si para todo $B \subset Y$ se verifica la igualdad $f^{-1}(\hat{B}) = [f^{-1}(B)]^{\circ}$ veamos que f es continua:

Si B es un abierto de Y , será $\hat{B} = B$ y en consecuencia,

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\hat{B}) = [f^{-1}(B)]^{\circ}$$

y $f^{-1}(B)$ es abierto, por lo que f es continua.

Tenemos también que si $A \subset X$ es abierto, entonces:

$$f^{-1}[[f(A)]^{\circ}] = [f^{-1}[f(A)]]^{\circ} \supset \hat{A} = A$$

y se cumple que $f(A) \subset [f(A)]^{\circ}$, de manera que, al ser $f(A)$ abierto en el espacio Y , la aplicación f es abierta.

* * *

- 3.14. Demostrar que una aplicación $f: X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos es continua y abierta si y solamente si para todo $B \in \mathcal{Y}$ es $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$.

SOLUCION.—Si f es continua y abierta, sea $B \in \mathcal{Y}$ arbitrario. Ahora $f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$ y por la continuidad de f es $f^{-1}(B)$ un conjunto cerrado. Luego, $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$.

Asimismo, por ser f abierta, $f[X - \overline{f^{-1}(B)}]$ es un conjunto abierto en Y ; además:

$$f[X - \overline{f^{-1}(B)}] \subset f[X - f^{-1}(B)] = f[f^{-1}(Y - B)] \subset Y - B$$

de donde:

$$f[X - \overline{f^{-1}(B)}] \subset (Y - B)^o = Y - \overline{B}$$

Es decir,

$$X - \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(Y - \overline{B}) = X - f^{-1}(\overline{B})$$

o lo que es lo mismo, $f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$, y los dos conjuntos coinciden: $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.

Supongamos ahora que para todo $B \in \mathcal{Y}$ es $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$. Si C es un conjunto cerrado en Y se verifica que:

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(\overline{C}) = \overline{f^{-1}(C)}$$

y f es una aplicación continua.

Para $A \subset X$ abierto, sea $y \notin [f(A)]^o$. Como tenemos $y \in Y - [f(A)]^o = \overline{Y - f(A)}$, al ser:

$$f^{-1}[Y - f(A)] = f^{-1}[\overline{Y - f(A)}] = \overline{X - f^{-1}f(A)} \subset \overline{X - A} = X - A$$

para todo $x \in X$ tal que $f(x) = y$ es $x \in X - A$; es decir, $x \notin A$. Luego, $y \notin f(A)$ y en consecuencia, tenemos que $f(A) \subset [f(A)]^o$, o lo que es lo mismo, $f(A)$ es un conjunto abierto en Y . La aplicación f es pues una aplicación abierta.

* * *

- 6.1. Sea $X = [-1, 1]$ y consideremos la topología T definida en X como:

$$T = \{A \subset X \mid 0 \notin A \text{ ó } (-1, 1) \subset A\}$$

Estudiar si el espacio (X, T) es compacto.

SOLUCION.—Si $U = \{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento por abiertos de (X, T) , existe $U_j \in U$ con $0 \in U_j$, por lo que $(-1, 1) \subset U_j$. Sean U_r y U_n abiertos del recubrimiento U tales que $-1 \in U_r$ y $1 \in U_n$. Entonces,

$$U' = \{U_r, U_n, U_j\}$$

es un subrecubrimiento finito de U ; por ello (X, T) es un espacio topológico compacto.

* * *

- 6.2. Sea (X, T) el espacio formado añadiendo un punto 1^* que no pertenece al intervalo $[0, 1]$ a este mismo conjunto. Consideramos una topología T en X para la cual los entornos de los elementos de $[0, 1]$ son los inducidos por la topología usual de $\mathbb{R}$, y una base de entornos del punto 1^* son los conjuntos de la forma: $(a, 1) \cup \{1^*\}$, con $0 < a < 1$.

a) Estudiar si el espacio (X, T) es compacto.

En efecto, si F' es una subfamilia finita de F , sea

$$x_0 = \min \{x \mid x \geq p, x \in R - D, (x, q) \in F'\}$$

Para todo $z \in R - D$ tal que $p \leq z \leq x_0$ no existe ningún conjunto $A \in F'$ tal que $z \in A$ y en consecuencia, F' no puede ser un recubrimiento de R .

* * *

- 6.4. Consideremos en el conjunto R de los números reales las topologías T_{CF} y T_{CN} del ejercicio 1.17. Estudiar si son compactos los espacios (R, T_{CF}) y (R, T_{CN}) .

SOLUCION.—Veamos en primer lugar que (R, T_{CF}) es compacto: Si $G = \{G_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto del espacio (R, T_{CF}) , fijemos $G_j \in G$. Como $G_j \in T_{CF}$, el conjunto $R - G_j$ es finito; supongamos que es:

$$R - G_j = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$$

Ahora, existen abiertos $G_{i_k} \in G$ tales que $x_{i_k} \in G_{i_k}$ para $k=0, 1, \dots, n$ y por lo tanto, la familia:

$$G' = \{G_j\} \cup \{G_{i_k} \mid k=0, 1, \dots, n\}$$

es un subrecubrimiento finito de G .

Por otra parte, sea el recubrimiento abierto del espacio (R, T_{CN}) :

$$F = \{R - N\} \cup \{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

donde $F_n = \{n\} \cup (R - N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si F' es una subfamilia finita de F , sea:

$$n_0 = \max \{n \mid F_n \in F'\}$$

y para $n > n_0$ en $\mathbb{N}$ no existe ningún abierto de F' que contenga dicho punto. Es decir, F no tiene ningún subrecubrimiento finito y en consecuencia, el espacio (R, T_{CN}) no es compacto.

* * *

$= X$; Si h es el extremo superior de S y $h \in B$, con $h \in I$ se tiene que $B \subset S$; por lo tanto, h es el extremo superior de X , pues en caso contrario existiría un intervalo (x, y) de manera que $h \in (x, y) \subset B$ y $(h, y) = \emptyset$ y así, $y \in S$, lo cual es imposible.

* * *

- 6.7. Sean (X, T) e (Y, S) espacios topológicos y K y K' subconjuntos compactos de (X, T) e (Y, S) respectivamente. Dado un cerrado C del espacio producto $(X \times Y, T \times S)$ tal que $(K \times K') \cap C = \emptyset$, demostrar que existen abiertos $G \supset K$ y $G' \supset K'$ que verifican que $(G \times G') \cap C = \emptyset$.

SOLUCION.—Sea $x \in K$; como $X - C$ es abierto, para cada $y \in K'$ existen entornos abiertos U_y de x y V_y de y tales que $(U_y \times V_y) \cap C = \emptyset$; puesto que K' es compacto, existe un conjunto finito $H = \{y_1, \dots, y_n\}$ tal que:

$$K' \subset \bigcup_{j=1}^n V_{y_j}$$

Para cada $x \in K$, sean $U_x = \bigcap_{j=1}^n V_{y_j}$ y $W_x = \bigcap_{j=1}^n V_{y_j}$. Por otra parte, como K es compacto, existe un conjunto finito $I = \{x_1, \dots, x_p\}$ tal que:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^p U_{x_i}$$

Ahora, para $G = \bigcup_{i=1}^p U_{x_i}$ y $G' = \bigcap_{j=1}^n W_{y_j}$ se verifica que $K \subset G$ y $K' \subset G'$, y además $(G \times G') \cap C = \emptyset$.

* * *

- 6.8. Sea (X, T) un espacio topológico regular, y A un subconjunto compacto del mismo. Probar que A es asimismo compacto.

SOLUCION.—Sea $U = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de A . Como el espacio (X, T) es regular, para cada $x \in A$, existe un entorno abierto V^x de x tal que:

$$x \in V^x \subset \overline{V^x} \subset U_x$$

donde U_x es un abierto del recubrimiento U .

Al ser A un conjunto compacto y $A \subset \bigcup_{x \in A} V^x$, existe un conjunto finito $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$ de manera que

$$A \subset \bigcup_{x_i \in M} V^{x_i}.$$

Por lo tanto,

$$\overline{A} \subset \overline{\bigcup_{x_i \in M} V^{x_i}} = \bigcup_{x_i \in M} \overline{V^{x_i}} \subset \bigcup_{x_i \in M} U_{x_i}$$

y en consecuencia, el conjunto $\overline{A}$ es compacto.

* * *

- 6.9. En el espacio (R, T_u) establecemos la relación de equivalencia S definida como sigue:

$$x S y \text{ si } x = y \text{ o bien } x = 1/n \text{ e } y = 1/m$$

donde n y m son números naturales distintos de cero. Consideremos el espacio cociente $(R/S, T_u/S)$ y la proyección canónica $p: R \rightarrow R/S$. Determinar si el conjunto $p([0, 1/2])$ es compacto.

SOLUCION.—Según está definida la relación S tenemos que $p([0, 1/2]) = p([0, 1/2])$ y como $[0, 1/2]$ es un conjunto compacto en el espacio (R, T_u) por ser p continua, el conjunto $p([0, 1/2])$ es compacto. Luego, $p([0, 1/2])$ es compacto en el espacio cociente R/S .

* * *

- 6.13. Sea (X, T) un espacio topológico compacto. Demostrar que para todo espacio topológico (Y, S) la proyección

$$p_2: X \times Y \longrightarrow Y$$

con $p_2(x, y) = y$, es una aplicación cerrada.

SOLUCION.—Sea C un subconjunto cerrado en $X \times Y$. Vamos a ver que $Y - p(C) \in S$.

En efecto, sea $y \in Y - p(C)$; como (X, T) es compacto y $\{y\}$ es compacto en (Y, S) , $X \times \{y\}$ es un subconjunto compacto de $(X, T) \times (Y, S)$, y $X \times \{y\} \subset (X \times Y) - C$. Por el problema 6.7, existe un abierto $G \in Y$, tal que $y \in G$ y

$$X \times G \subset (X \times Y) - C$$

Por lo tanto

$$y \in G \subset X - p(C)$$

y el conjunto $Y - p(C)$ es abierto.

* * *

- 6.14. Diremos que una función continua y suprayectiva

$$f: (X, T) \longrightarrow (Y, S)$$

es una identificación, si para cada $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ abierto implica que U es abierto en (Y, S) . Demostrar que si

$f: (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ es una función continua (X, T) es compacto e (Y, S) es de Hausdorff, entonces f es una identificación.

SOLUCION.—Sea $U \subset Y$ con $f^{-1}(U)$ abierto, entonces $X - f^{-1}(U)$ es cerrado en (X, T) . Como (X, T) es compacto, $X - f^{-1}(U)$ es compacto en (X, T) . Puesto que f es continua $f(X - f^{-1}(U))$ es un compacto en (Y, S) , y como (Y, S) es T_2 , $f(X - f^{-1}(U))$ es cerrado en (Y, S) .

Ahora bien, $f(X - f^{-1}(U)) = Y - f[f^{-1}(U)] = Y - U$, luego, U es abierto en (Y, S) .

* * *

SOLUCION.— $\tilde{f}: (X/f, T/f) \longrightarrow (X', T')$ es biyectiva ya que si $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$, entonces $f(x) = f(y)$, y $\bar{x} = \bar{y}$. Además:

$$\tilde{f}(p(\bar{x})) = \tilde{f}(\bar{x}) = f(x)$$

y como f es continua, por la propiedad universal de las topologías finales, $\tilde{f}$ es también continua.

Puesto que (X, T) es compacto y p continua, $p(X) = X/f$ es compacto. Como X/f es compacto, (X', T') es T_2 y f es continua, f es cerrada, ya que dado un cerrado C del espacio $(X/f, T/f)$ como X/f es compacto, C es compacto, luego $f(C)$ es compacto; como (X', T') es compacto y T_2 , $f(C)$ es cerrado, por lo que f es cerrada. Por lo tanto f es continua, cerrada y biyectiva, y en consecuencia, f es un homeomorfismo.

* * *

6.17. Sea T la topología generada en $\mathbb{R}$ por la base

$$B = \{[a, b) \mid a < b\}$$

Estudiar si $(\mathbb{R}, T)$ es compacto y si es localmente compacto.

SOLUCION.— $(\mathbb{R}, T)$ no es compacto, ya que dado el recubrimiento, por abiertos $G = \{[a, a+1)\}_{a \in \mathbb{Z}}$ no existe ningún subrecubrimiento finito de G , pues dada una subfamilia finita G' de G , si

$$a' = \min \{a \mid [a, a+1) \in G'\} \quad \text{y} \quad x < a',$$

entonces x no se puede recubrir por G' .

El espacio $(\mathbb{R}, T)$ no es localmente compacto, ya que dado un punto $p \in \mathbb{R}$ si p tiene un entorno compacto V , éste contiene un abierto que contiene a p . Supongamos que este abierto es de la base, $p \in [a, b) \subseteq V$; como $[a, b)$ es cerrado y V es compacto $[a, b)$ será compacto, pero esto es imposible, ya que el recubrimiento por abiertos de $[a, b)$, $G = \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definido por:

$$G_n = \left[\frac{a + (2^{n-1} - 1)b}{2^{n-1}}, \frac{a + (2^n - 1)b}{2^n} \right)$$

no tiene ningún subrecubrimiento finito.

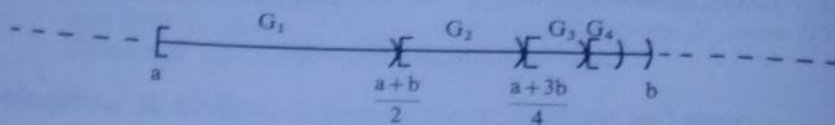


Figura 14

* * *

- 6.18. Estudiar para cada una de las aplicaciones f del ejercicio 6.10 si (R, T_f) es un espacio localmente compacto.

SOLUCION:

- a) Sea $f(x) = |x|$; si $x \leq 0$ como cada $\{x\}$ es abierto en T_f , existe un entorno compacto de x .

Si $x > 0$, $[0, x+1]$ es un entorno compacto de x en el espacio (R, T_f) puesto que $f([-x+1, x+1]) = [0, x+1]$, y el intervalo $[-x+1, x+1]$ es compacto en (R, T_u) .

Como cada punto de R tiene un entorno compacto en el espacio (R, T_f) éste es localmente compacto.

- b) Sea $f(x) = [x]$; si $x \notin \mathbb{Z}$, como cada $\{x\}$ es un conjunto abierto en T_f , existe un entorno compacto de x .

Si $x \in \mathbb{Z}$, el mínimo abierto de (R, T_f) que contiene a x es $A = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq x\}$ y A es compacto ya que dado un recubrimiento abierto $G = \{G_i\}_{i \in I}$ de A , existe un abierto G_i con $x \in G_i$ y como A es el mínimo abierto que contiene al punto x es $A \subset G_i$ por lo que $\{G_i\}$ es un subrecubrimiento finito de G .

Como cada punto de R tiene un entorno compacto en el espacio (R, T_f) , éste es también localmente compacto en este caso.

* * *

- 6.19. Sea $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 2\}$, y sea T la topología cuya base está formada por los conjuntos:

$$U_n = \{z \in X \mid z \text{ es divisor de } n\}$$

para $n \geq 2$.

Determinar si el espacio topológico (X, T) es compacto y si es localmente compacto.

SOLUCION.—Vamos a ver que (X, T) no es compacto. Sea,

$$V_m = \bigcup_{n=2}^m U_n$$

Como $V_m = \{x \mid 2 \leq x \leq m\}$, la familia $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ forma un recubrimiento abierto de (X, T) que no contiene ningún subrecubrimiento finito. Luego, (X, T) no es compacto.

Puesto que todo punto de (X, T) tiene un entorno finito, éste será compacto, y así el espacio en cuestión es localmente compacto.

* * *

6.20. Sean X un espacio topológico y x^* un punto de X . Supongamos que una base de entornos de x^* consiste en los conjuntos complementarios de los subconjuntos compactos de $X - \{x^*\}$. Si T es la topología de X , probar:

- El espacio (X, T) es compacto.
- Si $(X - \{x^*\}, T|_{(X - \{x^*\})})$ es localmente compacto y T_2 el espacio (X, T) es también T_2 .

SOLUCION:

- Si $U = \{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento por abiertos de (X, T) , existe un conjunto $U_j \in U$ tal que x^* es un elemento del mismo. Sea V un elemento de la base de entornos de x^* tal que $x^* \in V \subset U_j$; como V es un elemento de la base de entornos de x^* , $X - V$ es compacto y la familia

$$V' = \{U_i \cap (X - V)\}_{i \in I}$$

es un recubrimiento abierto de $X - V$, por lo que existirá un subrecubrimiento finito del mismo

$$\{U_i \cap (X - V)\}_{i \in F} \quad (F, \text{ finito}).$$

Ahora, $U' = \{U_j, \{U_i\}_{i \in F}\}$ es un subrecubrimiento finito de U y en consecuencia, el espacio (X, T) es compacto.

- b) Es suficiente comprobar que todo $x \in X - \{x^*\}$ y x^* tienen entornos disjuntos:

Como $X - \{x^*\}$ es localmente compacto, x tiene un entorno compacto $V \subset X - \{x^*\}$. Ahora, $W = X - V$ es un entorno de x^* en (X, T) de manera que $V \cap W = \emptyset$.

* * *

6.21. En el conjunto:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \cup \{(0, 0), (1, 0)\}$$

consideramos la topología T para la cual una base de entornos de $(x, y) \in X$ con $(x, y) \notin \{(0, 0), (1, 0)\}$ son los entornos inducidos en X por la topología usual de $\mathbb{R}^2$; las bases de entornos de $(0, 0)$ y $(1, 0)$ son, respectivamente:

$$B((0, 0)) = \{U_n(0, 0) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$$

$$B((1, 0)) = \{U_n(1, 0) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$$

donde:

$$U_n((0, 0)) = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \mid 0 < x < 1/2, 0 < y < 1/n\}$$

$$U_n((1, 0)) = \{(1, 0)\} \cup \{(x, y) \mid 1/2 < x < 1, 0 < y < 1/n\}$$

Probar que el espacio (X, T) no es compacto ni localmente compacto.

SOLUCION:

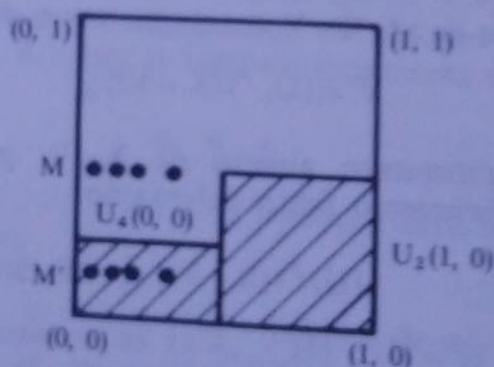


Figura 15

Sea $M = \{(1/n, 1/2) | n \in \mathbb{N}, n > 1\}$; M es un conjunto infinito de X y sin embargo no tiene ningún punto de acumulación, ya que si $(x, y) \in X$ es distinto de $(0, 0)$ y $(1, 0)$ siempre existe una bola abierta con centro en (x, y) , $B(x, y)$, tal que

$$(B(x, y) - \{(x, y)\}) \cap M = \emptyset;$$

si $(x, y) = (0, 0)$, $U_4(0, 0) \cap M = \emptyset$, y si $(x, y) = (1, 0)$, entonces $U_2(1, 0) \cap M = \emptyset$.

Como M no tiene puntos de acumulación, el espacio (X, T) no puede ser compacto.

Si V es un entorno compacto de $(0, 0)$, existe un número natural n tal que $U_n(0, 0) \subset V$. Sea $M' = \{(1/m, 1/2n) | m \in \mathbb{N}, m > 2\}$; el conjunto M' es infinito en V y sin embargo, se demuestra como en el caso anterior que no tiene puntos de acumulación. Es decir, V no puede ser compacto, y por lo tanto, el espacio (X, T) no es localmente compacto.

* * *

- 6.22. Sea (X, T) un espacio topológico T_2 y sean A_1 y A_2 dos subconjuntos localmente compactos de (X, T) , demostrar que $A_1 \cap A_2$ es localmente compacto.

SOLUCION.—Sea $x \in A_1 \cap A_2$; como A_1 es localmente compacto, existe un entorno compacto U_1 de x en A_1 , con $U_1 = W_1 \cap A_1$, donde W_1 es un entorno de x en el espacio total (X, T) . Análogamente, existe un entorno compacto U_2 de x en A_2 , con $U_2 = W_2 \cap A_2$, siendo W_2 un entorno de x en X .

Ahora, $U_1 \cap U_2 = (W_1 \cap W_2) \cap (A_1 \cap A_2)$ es un entorno de x en $A_1 \cap A_2$, y como $U_1 \cap U_2$ es compacto, se obtiene que $A_1 \cap A_2$ es localmente compacto.

* * *

- 6.23. Sea (X, T) un espacio de Hausdorff. Demostrar que si M es un subconjunto de X localmente compacto, es intersección de un abierto y un cerrado de dicho espacio.

SOLUCION.—Sean $A = \bar{M}$ y $A' = M \cup (X - \bar{M})$; como A es un conjunto cerrado, si demostramos que A' es abierto, habremos probado que M es intersección de un abierto y un cerrado de (X, T) , ya que $M = A \cap A'$.

Sea $x \in A'$; si $x \in X - \bar{M}$ existe un entorno abierto de x contenido en $X - \bar{M}$, pues $X - \bar{M}$ es abierto. Si $x \in M$, existe un entorno U de x tal que $V = U \cap M$ es compacto, y como (X, T) es T_2 , V es cerrado en este espacio.

Por ser U entorno de x , existe un abierto G tal que $x \in G \subset U$. Vamos a ver que $G \subset A'$: Sea $y \in G$ con $y \notin M$; entonces, $y \notin V$, por lo que $y \in W$, donde $W = G \cap (X - V)$ que es un entorno abierto de y que verifica que $W \cap M = \emptyset$. Luego, $y \notin \bar{M}$ y así $y \in X - \bar{M}$.

Por lo tanto, el conjunto A' es abierto en el espacio (X, T) y, tal como hemos indicado al principio, M es intersección de un abierto y un cerrado del mismo.

* * *

6.24. Sea (X, T) un espacio topológico localmente compacto y T_2 . Demostrar:

- a) Si M es un subconjunto cerrado de (X, T) el subespacio (M, T_M) es localmente compacto.
- b) Si M es la intersección de un abierto y un cerrado de (X, T) , M es localmente compacto.

SOLUCION:

- a) Sea $x \in M$; como (X, T) es localmente compacto, existe un entorno compacto V de x en el espacio X . El conjunto $W = V \cap M$ es un entorno de x en el subespacio (M, T_M) ; veamos que W es compacto.

Si $U = \{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de W en (M, T_M) y para cada $i \in I$ es $U_i = V_i \cap W$ con $V_i \in T$, sean $V'_i = V_i \cap V$ y $V_M = (X - M) \cap V$. La familia:

$$V' = \{\{V'_i\}_{i \in I}, V_M\}$$

es un recubrimiento abierto de V que, al ser éste compacto, tiene un subrecubrimiento finito.

$$\{V'_{i_1}, V'_{i_2}, \dots, V'_{i_k}\}$$

Ahora, $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\}$ donde, para $k = 1, 2, \dots, n$, es

$$U_{i_k} = V_{i_k} \cap W,$$

es un subrecubrimiento finito de U para el conjunto W y en consecuencia, éste es compacto.

- b) Sea $M = A \cap C$ con A abierto y C cerrado en el espacio (X, T) . Por ser A abierto y (X, T) un espacio T_2 , toda $x \in A$ tiene una base de entornos compactos, por lo que existe un entorno compacto V de x tal que $V \subseteq A$ y A es localmente compacto.

Por el apartado anterior, C es localmente compacto y, en virtud del ejercicio 6.22, $M = A \cap C$ es un subespacio localmente compacto.

* * *

- 6.25. Sea (X, T) un espacio topológico localmente compacto y regular. Probar que para todo $x \in X$ existe un entorno abierto U de x tal que $\bar{U}$ es compacto.

SOLUCION.—Por ser (X, T) localmente compacto, para todo $x \in X$ existe un entorno compacto V de x . Como (X, T) es regular, existe un entorno abierto U de x para el cual es

$$x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq V.$$

Puesto que $\bar{U}$ es cerrado y está contenido en el compacto V , $\bar{U}$ es compacto.

* * *

7.1. Sea el intervalo abierto $X = (0, 1)$, y sea la topología definida sobre X

$$T = \{U_n \mid U_n = \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right), n = 2, 3, 4, \dots\} \cup \{X, \emptyset\}$$

Estudiar si (X, T) es conexo.

SOLUCION.—Si (X, T) no fuese conexo existiría un conjunto M distinto de $\emptyset$ y X , abierto y cerrado. Por ser M abierto, $M = U_q = \left(0, 1 - \frac{1}{q}\right)$; por ser M cerrado, $X - M$ sería abierto; por lo tanto $X - M = \left(0, 1 - \frac{1}{p}\right)$, pero $M \cap (X - M) = \emptyset$, y en este caso:

$$\left(0, 1 - \frac{1}{q}\right) \cap \left(0, 1 - \frac{1}{p}\right) \neq \emptyset$$

Luego (X, T) es conexo.

* * *

7.2. Se definen en Z la topología T formada por los subconjuntos $M \subset Z$ con $0 \in M$ o $Z - M$ finito. Estudiar si (Z, T) es conexo.

SOLUCION.—El espacio (Z, T) no es conexo, puesto que si $A = Z - \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, A y B son abiertos en (Z, T) con $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = Z$.

* * *

7.3. Sea $X = \{x \in Z | x \geq 2\}$ y sea T la topología del problema 6.19. En (X, T) .

- Calcular la adherencia de un punto $p \in X$.
- Estudiar si (X, T) es conexo.

SOLUCION:

- Para todo $p \in X$ se tiene que:

$$\overline{\{p\}} = \{x \in Z | x = p\}$$

- Si suponemos que (X, T) es un espacio no conexo, existirán dos cerrados C_1 y C_2 tales que es $C_1 \cup C_2 = X$ y $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Ahora bien, si $p \in C_1$ y $q \in C_2$, $\overline{\{p\}} \subset C_1$ y $\overline{\{q\}} \subset C_2$, pero como $p \cdot q \in \overline{\{p\}}$ y $p \cdot q \in \overline{\{q\}}$ se tiene $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Luego (X, T) es un espacio conexo.

* * *

7.4. Sea (X, T) un espacio topológico. Demostrar que es conexo si y solamente si para todo subconjunto M de X distinto del vacío y de todo X se verifica que $\text{Fr}(M) \neq \emptyset$.

SOLUCION.—Si (X, T) es conexo, entonces M no puede ser abierto y cerrado a la vez. Como:

$$\dot{M} = M - \text{Fr}(M)$$

$$\overline{M} = M \cup \text{Fr}(M)$$

y o bien es $M \neq \dot{M}$, o bien $M \neq \overline{M}$, será $\text{Fr}(M) \neq \emptyset$.

Si suponemos ahora que $\text{Fr}(M) \neq \emptyset$ para todo subconjunto M distinto del vacío y de todo X , o bien es $\dot{M} \neq M$ o bien $\overline{M} \neq M$.

Por lo tanto, el conjunto M no puede ser simultáneamente abierto y cerrado en el espacio (X, T) . En consecuencia, éste es conexo.

* * *

- 7.5. Probar que un espacio topológico (X, T) es conexo si y sólo si para cualquiera $x, y \in X$ existe un subconjunto conexo A de X tal que $x, y \in A$.

SOLUCION.—Si (X, T) es conexo, la propiedad se verifica haciendo $A = X$.

Supongamos que para todo par de puntos $x, y \in X$ existe un subconjunto conexo A en X tal que $x, y \in A$. Si fijamos un elemento $x = x_0$ en X , para $y \in X$ arbitrario, llamemos A_y al conjunto conexo que contiene x_0 y al punto y . Ahora: $x = \bigcup_{y \in X} A_y$ y

como $x_0 \in \bigcap_{y \in X} A_y$, al ser A_y conexo para todo $y \in X$, el espacio X es conexo.

* * *

- 7.6. Sea (X, T) un espacio topológico conexo y sea A un subconjunto conexo de X . Supongamos que $X - A = V \cup W$, donde V y W son abiertos no vacíos del subespacio $X - A$ con $V \cap W = \emptyset$. Demostrar que $A \cup V$ y $A \cup W$ son subconjuntos conexos de X .

SOLUCION.—Vamos a ver que el conjunto $A \cup V$ es conexo: el otro caso se hace de la misma manera.

Supongamos que $A \cup V$ no es un conjunto conexo, en este caso, existirá un conjunto B abierto y cerrado en el subespacio $A \cup V$, distinto de $\emptyset$ y de $A \cup V$. Como A es conexo, será $A \subset B$, o bien $A \subset (A \cup V) - B$. Si se verifica que $A \subset (A \cup V) - B$, tenemos que $B \subset V$, por lo que este conjunto será abierto y cerrado en V , que al ser abierto y cerrado en $X - A$, obtenemos que el conjunto B es abierto y cerrado en $A \cup V$. Luego, B es abierto y cerrado en $X = (X - A) \cup (A \cup V)$, lo que es imposible, al ser X un espacio conexo. Análogamente en el caso en que es $A \subset B$.

* * *

7.7. Sea (R, T^*) el espacio topológico del ejercicio 6.3.

- Demostrar que los conjuntos conexos de (R, T^*) coinciden con los de (R, T_u) .
- Probar que si $f: ([0, 1], T_u|_{[0, 1]}) \longrightarrow (R, T^*)$ es continua, es una aplicación constante.

SOLUCION:

- Como $T_u \subset T^*$ cada subconjunto conexo de T^* es evidentemente conexo en T_u . Por otra parte, puesto que cada subconjunto conexo de (R, T_u) es un intervalo y su interior en T^* coincide con su interior en T_u será suficiente demostrar que ningún intervalo abierto I de R puede ser no conexo en la topología T^* :

Supongamos que I fuese no conexo en esta topología; entonces, existirían abiertos no vacíos M y N tales que $I = M \cup N$ con $M \cap N = \emptyset$. Como las adherencias de M y N en T^* son conjuntos cerrados en T_u y además es $M = (X - \overline{N}) \cap I$; $N = (X - \overline{M}) \cap I$, M y N son abiertos en la topología T_u e I no sería conexo en la misma.

- Si f es continua, $f([0, 1])$ es compacto y conexo. Por ser conexo, en virtud del apartado anterior de este problema $f([0, 1])$ es un intervalo; por ser compacto, por el ejercicio 6.3., $f([0, 1])$ no puede contener un intervalo $[p, q]$ con $p, q \in D$. Puesto que D es un conjunto denso, $f([0, 1])$ debe ser constante.

* * *

7.8. Dado el conjunto:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y = 1\}$$

Para cada $n = 1, 2, \dots$, sea $X_n = A \cup A_n$ considerando como subespacio de $(\mathbb{R}^2, T_u)$, donde:

$$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1/n, 0 \leq y \leq 1\}$$

Probar que para cada n , X_n es conexo, mientras que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ no lo es.

SOLUCION.—Llamemos:

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y = 0\}$$

$$A^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y = 1\}$$

Tenemos ahora que A' , A^* y A_n son conexos en el espacio $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, T_u \times T_u)$ y como para todo n es $A' \cap A_n \neq \emptyset$ y $A^* \cap A_n \neq \emptyset$ el conjunto $X_n = A' \cup A^* \cup A_n$ es conexo.

Al ser $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n = A$, $A = A' \cup A^*$ y $A' \cap A^* = \emptyset$ con A' y A^*

abiertos, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ no es un conjunto conexo.

* * *

7.9. En la recta real $\mathbb{R}$ consideramos las topologías usual, T_u , y la de los complementos numerables, T_{CN} . Sea T' la topología menos fina que contiene las dos topologías indicadas:

- Estudiar si $(\mathbb{R}, T')$ es conexo.
- Demostrar que $(\mathbb{R}, T')$ cumple la propiedad de que ningún par de puntos del mismo puede ser conectado mediante un camino de dicho espacio.

SOLUCION:

- Si $R = A \cup B$, donde A y B son abiertos en T' disjuntos y no vacíos, A y B son también cerrados en T' y por lo tanto, A y B son abiertos en la topología usual de $\mathbb{R}$. Pero como $(\mathbb{R}, T_u)$ es conexo, o bien es $A = \emptyset$, o bien $B = \emptyset$. En consecuencia, el espacio $(\mathbb{R}, T')$ es conexo.
- Si para $p, q \in \mathbb{R}$ existe una aplicación continua:

$$\gamma: ([0, 1], T_u|_{[0, 1]}) \longrightarrow (\mathbb{R}, T')$$

con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$, el conjunto $\gamma([0, 1])$ es compacto y conexo en $(\mathbb{R}, T')$. Por ser compacto, será finito, mientras que al ser conexo se reduce a un único punto. Es decir, $p = q$.

* * *

ra que $M = A' \cup B'$. Así pues, M no es conexo en el espacio (X, T) , por lo que ningún conjunto que contenga propiamente a B_n puede ser conexo. En consecuencia, los conjuntos B_n ($n = 1, 2, \dots$) son componentes conexas del espacio (X, T) .

Por otra parte, los conjuntos $\{(0, 0)\}$ y $\{(0, 1)\}$ son componentes conexas de este espacio, como puede comprobarse con facilidad. Luego, las componentes conexas de (X, T) son la familia:

$$\mathcal{C} = \{B_n\}_{n=1, 2, \dots} \cup \{(0, 0), (0, 1)\}$$

* * *

- 7.20. Si (X, T) e (Y, S) son dos espacios topológicos, demostrar que el espacio producto $(X \times Y, T \times S)$ es conexo por caminos si y sólo si X e Y son conexos por caminos.

* * *

SOLUCION.—Si el espacio producto $X \times Y$ es conexo por caminos, como las proyecciones $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ definida como $p_1(x, y) = x$, $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ definida tal que $p_2(x, y) = y$, son continuas y exhaustivas, resulta que $p_1(X \times Y) = X$ y $p_2(X \times Y) = Y$ son espacios conexos por caminos.

Sean ahora los espacios X e Y conexos por caminos y sean dos elementos arbitrarios $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ en el espacio producto $X \times Y$. Por hipótesis, existen aplicaciones continuas:

$$f_1 : [0, 1] \longrightarrow X; \quad f_2 : [0, 1] \longrightarrow Y$$

tales que $f_i(0) = a_i$, $f_i(1) = b_i$, ($i = 1, 2$). Si definimos:

$$f : [0, 1] \longrightarrow X \times Y$$

como $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, la aplicación f es continua y además $f(0) = a$, $f(1) = b$, por lo que el espacio producto $X \times Y$ es conexo por caminos.

* * *

al ser $[0, 1]$ compacto y localmente conexo, como S^* es T_2 , γ es una aplicación cerrada, y así, por el problema 7.21, $\gamma([0, 1])$ será localmente conexo, lo cual es imposible, pues $\gamma(0)$ no tiene ninguna base de entornos conexos en este espacio.

* * *

7.23. En el espacio $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, T_u \times T_u)$ consideremos el subespacio:

$$B = \{(x, 0) \mid 1/2 \leq x \leq 1\} \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

donde, para cada $n = 1, 2, \dots$ es:

$$A_n = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{n}x; 0 \leq x \leq 1\}$$

Probar:

- Los conjuntos B y $\overline{B}$ son conexos.
- B y $\overline{B}$ no son localmente conexos.
- $\overline{B}$ es conexo por caminos, mientras que B no lo es.

SOLUCION:

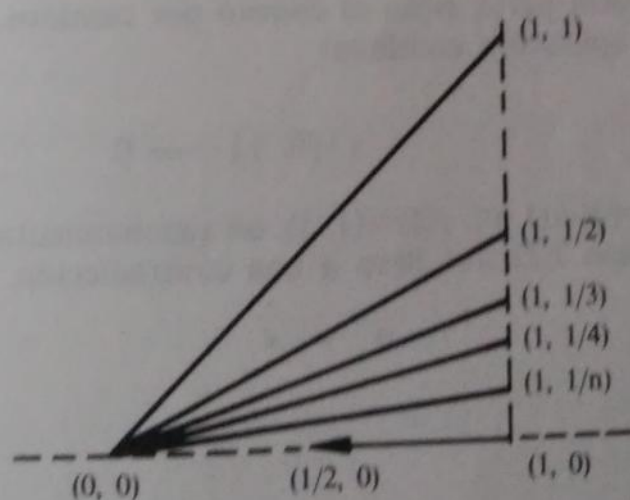


Figura 19